Tentamen Vectoranalyse

21 januari 2008, 14:00-17:00 uur

Het tentamen bestaat uit de onderstaande **vier** opgaven. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (10+5+10 pt.)
Het oppervlak S is gegeven door de vergelijking

$$x^4 + y^4 + z^4 - z = 2.$$

1. Bereken het raakvlak aan S in $p_0 = (1, 1, 1)$.
2. Bewijs dat het oppervlak S in de buurt van p_0 geschreven kan worden als grafiek van een C^1-functie g van twee variabelen, d.w.z.

   $$z = g(x, y),$$

   met $g(1, 1) = 1$.
3. Toon aan dat S in de buurt van p_0 onder zijn raakvlak in p_0 ligt. (Opmerking: je mag aannemen dat de functie g uit onderdeel 2 zelfs een C^2-functie is.)

Opgave 2 (10+15 pt.)
Laat $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2-functie zijn, en laat $z = g(x, y)$. Via $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ wordt z een functie van (r, θ).

1. Druk de partiële afgeleiden $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ uit in $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ en $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.
2. Toon vervolgens aan dat

   $$x^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\,x\,y\,\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = r^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}.$$

Z.O.Z.

Opgave 3 (20 pt.)
Gegeven is het punt $p = (0, 0, z_0)$, met $z_0 > 0$, en het oppervlak met vergelijking

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}, \quad \text{met } 0 < a < b.$$

Bepaal de kortste afstand van p tot een punt van dit oppervlak.

Aanwijzing: introduceer de functie die elk punt van het oppervlak afbeeldt op het kwadraat van zijn afstand tot p.

Opgave 4 (6+14 pt.)
Het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ is gegeven door:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\frac{x}{r^2} - 6\,x)\,\mathbf{i} + \frac{y}{r^2}\,\mathbf{j} + \frac{z}{r^2}\,\mathbf{k},$$

waarbij $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. C en C' zijn C^1-krommen in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ van $(1, 0, 0)$ naar $(0, 0, 1)$. Toon aan dat
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

2. Bereken
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$